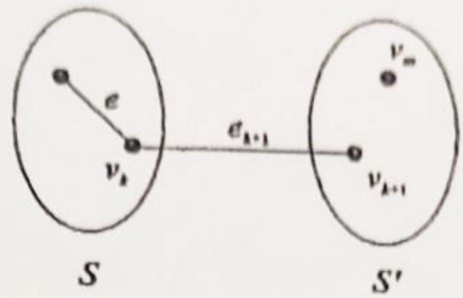
$v_k \in S$ i $v_{k+1} \in S'$ Kako $v_m \in S'$, $e_{k+1} = v_k v_{k+1}$ je jedina grana koja spaja S i S' u grafu G_k.. To znači da je e_{k+1} most u G_k (sl. 3).



Sl. 3.

Neka je e, ($e \neq e_{k+1}$), grana u G_k incidentna sa v_k.. (Ona postoji jer u završnom grafu G_m čvor v_k ima pozitivan stepen.) Shodno koraku 2 Flerijevog algoritma i grana e je most u G_k.. (U protivnom ona bi bila izabrana u $(k + 1)$-om koraku, a ne e_{k+1}.) Kako je e most u G_k, e je most u svakom indukovanom pografu grafa G_k koji sadrži e. Specijalno, e je most u $G_k[S]$. S druge strane je $G_k[S] = G_m[S]$ i svi čvorovi grafa $G_m[S]$ su parnog stepena. (Zašto?) Isto važi i za $G_k[S]$. Tako je $G_k[S]$ graf čiji su svi čvorovi parnog stepena, a koji sadrži most. Kontradikcija sa zadatkom 35, glava 2. ∎

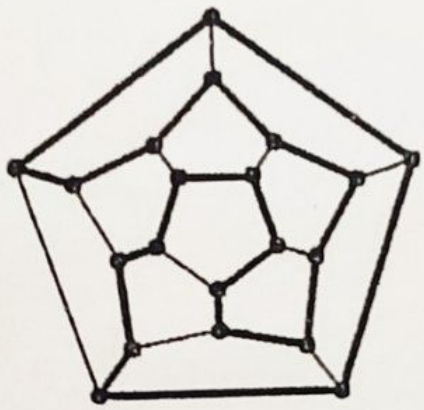
Uz malu modifikaciju, sličnu onoj u teoremi 3, Flerijevim algoritmom dobija se Ojlerov put u poluojlerovom grafu.

3. 2 Hamiltonovi grafovi

Slično Ojlerovim i Hamiltonovi grafovi imaju svoju predistoriju. Godine 1857 poznati irski matematičar Vilijam Hamilton (Ser William Rowan Hamilton) lansirao je sledeću igru na dodekaedru. Dodekaedar je jedan od pet pravilnih poliedara, Platonovih tela. Ima 12 strana i 20 temena. Sve strane su pravilni petouglovi i u svakom temenu sustiču se po tri. Hamilton je temena dodekaedra obeležio imenima 20 svetskih metropola i postavio zadatak da se nađe "put oko sveta". Pod tim je podrazumevao putanju ivicama dodekaedra koja kroz svako teme (metropolu) prolazi tačno jedanput i počinje i završava se u istom temenu.

Radi bolje preglednosti i orijentacije, umesto samog dodekaedra zgodno je posmatrati njegovu stereografsku projekciju (sl. 4). (Nešto više o stereografskoj projekciji može se naći u prvom paragrafu glave 4.) Tada se

Hamiltonov "put oko sveta" svodi se na konturu koja prolazi kroz sve čvorove tako dobijenog grafa. Na sl. 4 punim linijama prikazana je jedna takva kontura.



Sl. 4.

Po Hamiltonu konture koja sadrže sve čvorove grafa zovu se ***Hamiltonove konture***, a grafovi u kojima postoje takve konture ***Hamiltonovi grafovi***.

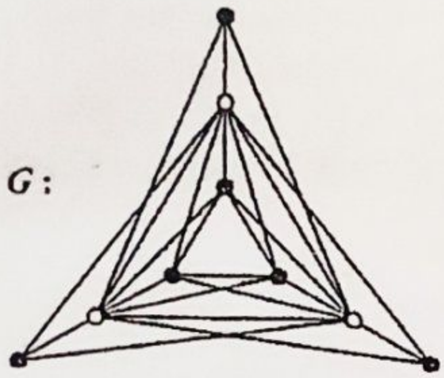
Dok među definicijama Ojlerovih i Hamiltonovih grafova postoji velika sličnost, sasvim je drugačije kada su u pitanju njihove karakterizacije. Kao što smo imali prilike da vidimo za Ojlerove grafove postoji jednostavan kriterijum dat teoremom 2. Nasuprot tome, za Hamiltonove grafove sličnog kriterijuma nema. Bolje reći, još uvek nije poznat. To je jedan od najtežih problema teorije grafova.

Poznato je više potrebnih i više dovoljnih uslova da graf bude Hamiltonov. Na primer, ako je G Hamiltonov graf, tada zbog prisustva Hamiltonovu konture nema artikulacionih čvorova. Prema tome G je 2-povezan. Otuda graf koji nije 2-povezan nije Hamiltonov. Drugi nešto manje očigledan potreban uslov sadržan je u narednoj teoremi. Veoma je praktičan i zgodno se može upotrebiti u različitim konkretnim slučajevima.

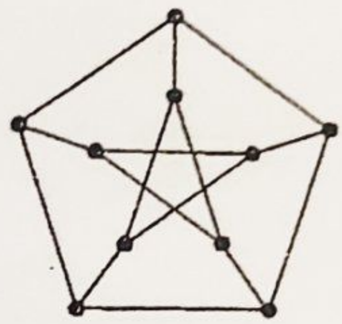
Teorema 5. *Ako je G Hamiltonov graf, tada za svaki pravi neprazan podskup $S \subset V(G)$ važi*

$$\omega(G - S) \leq |S|.$$

Dokaz. Neka je C Hamiltonova kontura u G. Tada je $E(C) \subset E(G)$, pa važi $\omega(G - S) \leq \omega(C - S)$. (Radi se o tome da se dodavanjem novih grana ne povećava broj komponenti.) Međutim važi $\omega(C - S) \leq |S|$. Zaista, uklanjanjem izvesnog broja čvorova kontura se raspada na jedan ili više disjunktnih puteva. Pri tome jednakost važi samo u slučaju kada nikoja dva čvora iz S nisu susedi u C. Tada se C raspada na tačno $|S|$ disjunktnih puteva. Iz navedenih nejednakosti neposredno sledi $\omega(G - S) \leq |S|$. ■



Sl. 5.



Sl. 6.

Kao ilustrativan primer za primenu ove teoreme može da posluži graf G na slici 5. Ako se za S uzme skup od 3 "bela" čvora, tada je $G - S = K_3 \cup K_1 \cup K_1 \cup K_1$, odnosno $\omega(G - S) = 4 > 3 = |S|$. Zato G nema Hamiltonovu konturu.

Da uslov iz teoreme 5 nije i dovoljan pokazuje primer u Petersenovog grafu (sl. 6). Neka čitalac sam proveri da u tom grafu ne postoji podskup čvorova S, takav da je $\omega(G - S) > |S|$. Ipak, Petersenov graf nije Hamiltonov (zad. 8).

Dovoljni uslovi za Hamiltonove grafove su daleko brojniji od potrebnih. Jedan od najpoznatijih je Oreov (O.Ore, 1960).

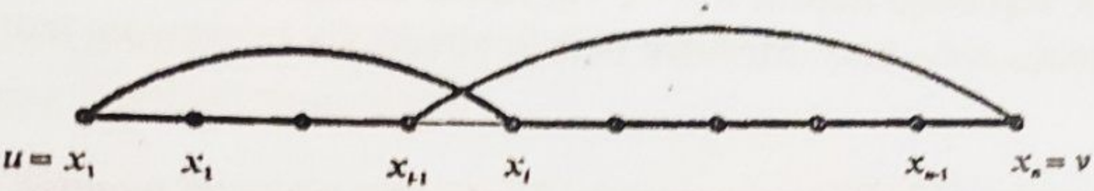
Teorema 6. *Neka je G graf sa n ($n \geq 3$) čvorova, takav da za svaka dva nesusedna čvora u i v važi*

$$d(u) + d(v) \geq n .$$

Tada je G Hamiltonov graf.

Dokaz. Pretpostavimo da tvrđenje nije tačno, tj. da postoji graf sa n ($n \geq 3$) čvorova, koji zadovoljava uslov teoreme, a nije Hamiltonov. Među svim takvim grafovima uočimo onaj koji ima najviše grana. Obeležimo ga sa G. Dakle, G nije Hamiltonov, ali za svaka dva nesusedna čvora u i v, ($uv \notin E(G)$), graf $G + uv$ je Hamiltonov. Naravno, G ne može biti kompletan.

Neka su u i v dva nesusedna čvora u G. Kako graf $G + uv$ ima, a G nema Hamiltonovu konturu, svaka Hamiltonova kontura u $G + uv$ sadrži granu uv. To znači da u G postoji put $P = x_1x_2 \dots x_n$, gde je $x_1 = u$, $x_n = v$, koji sadrži sve čvorove grafa G. (P se dobija izostavljanjem grane uv sa Hamiltonove konture.) Tvrdimo da ako $x_1x_i \in E(G)$, $(2 \leq i \leq n)$, tada $x_{i-1}x_n \notin E(G)$.



Sl. 7.

Pretpostavimo suprotno. Tada je za neko i, $(2 \leq i \leq n)$, $x_1x_i, x_{i-1}x_n \in E(G)$. No tada je $x_1x_i\, x_{i+1} \dots x_n\, x_{i-1}\, x_{i-2} \dots x_2\, x_1$ je Hamiltonova kontura u G (sl. 7). To je kontradikcija s pretpostavkom da G nije Hamiltonov graf. Prema tome svakom susedu $x_i \in \{x_2, x_3, \dots, x_n\}$ čvora $x_1 = u$ odgovara čvor $x_{i-1} \in \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ koji nije sused sa $x_n = v$. Stoga je $d(x_n) \leq (n - 1) - d(x_1)$, odnosno

$$d(u) + d(v) < n.$$

što je kontradikcija sa uslovom teoreme. Otuda je G je Hamiltonov graf. ■

Oreova teorema nije potreban uslov da graf bude Hamiltonov. Kontraprimer je recimo kontura C_n, $(n \geq 5)$. Za svaka dva nesusedna čvora $u, v \in V(C_n)$ važi $d(u) + d(v) = 4 < n$, a C_n je ipak Hamiltonov graf.

Nasuprot tome Oreov uslov $d(u) + d(v) \geq n$ ne može ni da se oslabi. Naime, graf sa n čvorova u kojem za svaka dva nesusedna čvora u i v važi $d(u) + d(v) \geq n - 1$ ne mora da bude Hamiltonov. Primer je nehamiltonov graf koji se sastoji od kompletnih grafova $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ i $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ koji imaju tačno jedan zajednički čvor ili pak kompletan bipartitan graf $K_{k,k+1}$.

Direktna posledica Oreove teoreme je teorema Diraka (G.Dirac, 1952)

Teorema 7. *Ako je G graf sa graf sa n* $(n \geq 3)$ *čvorova, takav da je* $d(u) \geq \frac{n}{2}$, *za svako* $u \in V(G)$, *tada je G Hamiltonov graf.* ■

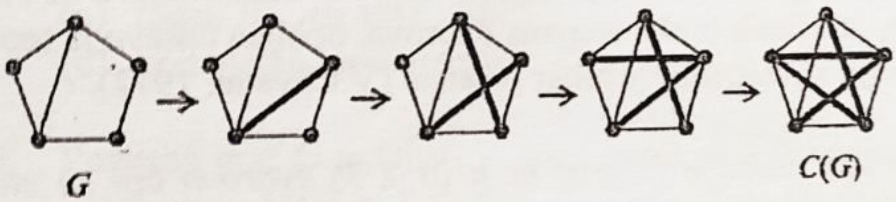
Nije teško videti da se uslov $d(u) \geq \frac{n}{2}$ takođe ne može oslabiti.

Koristeći Oreovu ideju Bondi i Hvatal (J.A.Bondy, V.Chvatal, 1976) su dokazali sledeće tvrđenje.

Teorema 8. *Neka je G graf sa n čvorova i u i v dva nesusedna čvora u G, takva da je $d(u) + d(v) \geq n$. Tada je graf $G + uv$ Hamiltonov ako i samo ako je G Hamiltonov.*

Dokaz. Sličan dokazu teoreme 6. ■

Zatvorenje grafa G, oznaka $C(G)$, je graf koji se dobija is G sukcesivnim dodavanjem grana koje povezuju nesusedne čvorova čiji je zbir stepena bar n. Pri tome se stepeni čvorova računaju u odnosu na grafove koji nastaju nakon svakog dodavanja nove grane. Povezivanje se izvodi sve dok takvih čvorova ima. Na sl. 8 prikazano je kako nastaje zatvorenje grafa G. Punim linijama označene su nove grane. U ovom slučaju zatvorenje je kompletan graf, $C(G) = K_5$.



Sl. 8.

Da je definicija zatvorenja dobra, što znači da završni graf ne zavisi od redosleda dodavanja novih grana, potvrda je

Teorema 9. *Neka je G sa n čvorova i neka su G_1 i G_2 grafovi dobijem iz G sukcesivnim spajanjem nesusednih čvorova čiji je zbir stepena bar n. Tada je $G_1 = G_2$.*

Dokaz. Neka je graf G_1 dobijen sukcesivnim dodavanjem grana $e_1, e_2, \ldots, e_i$, a graf G_2 dodavanjem grana $f_1, f_2, \ldots, f_j$ grafu G. Za $G_1 = G_2$ dovoljno je da se pokaže $\{e_1, e_2, \ldots, e_i\} = \{f_1, f_2, \ldots, f_j\}$.

Pretpostavimo suprotno. Tada jedan od navedenih skupova sadrži granu koje nema u drugom. Ne umanjujći na opštosti može se uzeti da postoji ceo broj k, $(0 \leq k \leq i - 1)$, takav da je $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subset \{f_1, f_2, \ldots, f_j\}$, dok $e_{k+1} = uv \notin \{f_1, f_2, \ldots, f_j\}$. Neka je G_3 graf dobijen dodavanjem grana $e_1, e_2, \ldots, e_k$ grafu G. S obzirom da $e_{k+1} \in E(G_1)$, iz definicije zatvorenja sledi

$d_{G_3}(u)+d_{G_3}(v)\geq n$. S druge strane G_3 je pograf od G_2, što povlači $d_{G_2}(u)+d_{G_2}(v)\geq d_{G_3}(u)+d_{G_3}(v)\geq n$. Međutim čvorovi u i v su nesusedni u G_2. To je kontradikcija s definicijom zatvorenja. ■

Direktne posledice teoreme 8 su

Teorema 10. *Graf G je Hamiltonov ako i samo ako je zatvorenje $C(G)$ Hamiltonov graf.* ■

Teorema 11. *Neka je G graf sa bar tri čvora. Ako je graf $C(G)$ kompletan, tada je graf G Hamiltonov.* ■

Ako graf G koji ima n ($n \geq 3$) čvorova zadoljava uslov teoreme 6, tada je $C(G) = K_n$ i G je Hamiltonov. Tako je Oreova teorema posledica teorema 10. Treba još spomenuti da je najveći broj dovoljnih uslova za Hamiltonove grafove, izraženih preko stepena čvorova, dobijen upravo iz teoreme 10. Kao ilustraciju navešćemo rezultat Hvatala (V.Chvatal, 1972).

Teorema 12. *Neka je G graf sa n ($n \geq 3$) čvorova čiji su stepeni $d_1, d_2, \ldots, d_n$, ($d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$). Ako ne postoji prirodan broj k, ($k < \frac{n}{2}$), takav da je $d_k \leq k$ i $d_{n-k} \leq n-k-1$, tada je G Hamiltonov graf.*

Dokaz. Pokazaćemo da je $C(G) = K_n$, što je prema teoremi 10 dovoljno da G bude Hamiltonov graf.

Pretpostavimo da je $C(G) \neq K_n$. Tada u $C(G)$ ima nesusednih čvorova. Neka su u i v nesusedni čvorovi u $C(G)$ čiji je zbir stepena $d_{C(G)}(u) + d_{C(G)}(v)$ najveći. Kako $uv \notin E(C(G))$, sledi $d_{C(G)}(u) + d_{C(G)}(v) \leq n-1$. Radi određenosti uzmimo da je $d_{C(G)}(u) \leq d_{C(G)}(v)$. Ako je $d_{C(G)}(u) = k$, tada je $k \leq \frac{n-1}{2} < \frac{n}{2}$ i $d_{C(G)}(v) \leq n-1-k$. Obeležimo sa W skup svih čvorova različitih od v koji nisu susedi sa v u $C(G)$. Razume se, $u \in W$. Tada je $|W| = n-1-d_{C(G)}(v) \geq k$. Ako je w proizvoljan čvor iz W, tada zbog izbora čvorova u i v važi $d_G(w) \leq d_{C(G)}(w) \leq d_{C(G)}(u) = k$, tj. $d_G(w) \leq k$. Dakle, svaki čvor skupa W, a ima ih $|W| \geq k$, ima stepen $\leq k$ u G. Kako su stepeni poređani po veličini, $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$, sledi $d_k \leq k$, $k < \frac{n}{2}$.

Slično, obeležimo sa U skup svih čvorova različitih od u koji nisu susedi sa u u $C(G)$. Tada $v \in U$ i $|U| = n - 1 - d_{C(G)}(u) = n - 1 - k$. Zbog izbora u i v, za svaki čvor w iz U važi $d_G(w) \leq d_{C(G)}(w) \leq d_{C(G)}(v) \leq n - 1 - k$. Tako U sadrži $n - 1 - k$ čvorova od kojih svaki ima stepen $\leq n - 1 - k$ u G. Kako $u \notin U$, a važi $d_G(u) \leq d_{C(G)}(u) \leq d_{C(G)}(v) \leq n - 1 - k$, G sadrži $n - k$ čvorova, to su $U \cup \{u\}$, koji imaju stepene $\leq n - 1 - k$. Kao u slučaju skupa W, zaključujemo da je $d_{n-k} \leq n - k - 1$. Međutim to je kontradikcija sa uslovom teoreme. ■

Lako se vidi da je Dirakova teorema 7 posledica svake od teorema 6, 10 i 12.

Slično Hamiltonovoj konturi ***Hamiltonov put*** je put koji sadrži sve čvorove grafa. Graf koji ima Hamiltonov put zove se ***poluhamiltonov***. Kao i za Hamiltonove, tako ni za poluhamiltonove grafove nije poznat potreban i dovoljan uslov. Neš-Vilijams (C.Nash-Williams) je pokazao je da potreban i dovoljan uslova za Hamiltonove grafove povlači potreban i dovoljan uslov za poluhamiltonove i obratno. Drugim rečima, oni su ekvivalentni. Interesantno je da se potrebni i dovoljni uslovi za Hamiltove puteve izvode iz odgovarajućih za Hamiltonove konture. Navešćemo nekoliko bez dokaza.

Teorema 13. *Ako je G poluhamiltonov graf, tada za svaki pravi neprazan podskup S, $S \subset V(G)$, važi*

$$\omega(G - S) \leq |S| + 1. \quad ■$$

Teorema 14. *Ako je G graf sa n ($n \geq 3$) čvorova, takav da za svaka dva nesusedna čvora u i v važi*

$$d(u) + d(v) \geq n - 1,$$

tada je G poluhamiltonov graf. ■

Teorema 15. *Ako je G graf sa graf sa n ($n \geq 3$) čvorova, takav da je $d(u) \geq \frac{n-1}{2}$, za svako $u \in V(G)$, tada je G poluhamiltonov graf.* ■

Ako za svaka dva čvora u i v grafa G postoji u-v Hamiltonov put u G, kažemo da G ***Hamiltonski povezan***. Lako se vidi da je Hamiltonski povezan graf sa bar 3 čvorova Hamiltonov i naravno, poluhamiltonov. Obrnuto ne mora da važi. Na primer, kontura C_n, ($n > 3$). Za Hamiltonski povezane grafove takođe nije poznat potreban i dovoljan uslova. Nekoliko dovoljnih uslova izvodi se iz neznatno modifikovane ideje zatvorenja grafa.